OPERACIONES CON MATRICES

(1) II-B-3) 2003-2004

a) (1 punto) Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de *a*?

b) (1'5 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) VI-B-3) 2003-2004 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1'25 puntos) Calcula $A\cdot B$, $A\cdot C$, $A^t\cdot B^t$ y $C^t\cdot A^t$, siendo A^t, B^t y C^t las matrices transpuestas de *A*, *B* y *C*, respectivamente.

b) (1'25 puntos) Razona cuáles de las matrices *A*, *B*, *C* y $A\cdot B$ tienen matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

(3) I-A-3) 2004-2005 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) ¿Tiene *A* inversa? En caso afirmativo, calcúlala

b) (1'5 puntos) Determina la matriz *X* que cumple que $A\cdot X+C\cdot B^t=B\cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de *B*.

(4) II-B-3) 2004-2005 **(2'5 puntos)** Halla la matriz *X* que cumple que $A\cdot X\cdot A-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(5) III-B-3) 2004-2005 Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

a) (1'25 puntos) Determina el valor de *b* para el que $A^2-2A+I=O$.

b) (1'25 puntos) Para $b=2$ halla la matriz *X* que cumple que $A\cdot X-2A^t=O$, donde A^t denota la matriz transpuesta de *A*.

(6) IV-A-3) 2004-2005 Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Halla los valores de *x* para los que la matriz $A-xI$ no tiene inversa.

b) (1'5 puntos) Halla los valores de *a* y *b* para los que $A^2+aA+bI=O$.

II-B-3) 2005-2006 **(2'5 puntos)** Resuelve $AB^tX=-2C$, siendo B^t la traspuesta de *B* y $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(7) III-A-3) 2005-2006 Considera $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo *a* un número real.

a) (1 punto) Calcula el valor de *a* para que $A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

b) (1 punto) Calcula, en función de *a*, los determinantes de $2A$ y A^t.

c) (0'5 puntos) ¿Existe algún valor de *a* para el que la matriz *A* sea simétrica? Razona la respuesta

(8) III-B-3) 2005-2006 **(2'5 puntos)** Resuelve $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(9) IV-A-3) 2005-2006 Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determina los valores de $m\in R$ para los que la matriz A tiene inversa.
b) (1'5 puntos) Para $m=0$ y siendo $X=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, resuelve $XA=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(10) IV-B-3) 2005-2006 Sea $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden 2.

a) (1'25 puntos) Calcula los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$ tales que $|A-\lambda I|=0$

b) (1'25 puntos) Calcula $A^2-7A+10I$.

(11) VI-A-3) 2005-2006 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Halla, si existe, la matriz inversa de $AB+C$.

b) (1'25 puntos) Calcula, si existen, los números x e y que verifican. $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(12) I-A-3) 2006-2007 Sea I la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I)^2=O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

b) (1'25 puntos) Para $m=2$, halla la matriz X tal que $AX-2A^t=O$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

(13) II-A-3) 2006-2007 Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Determina la matriz $B=A^2-2A$.
b) (0'75 puntos) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.
c) (0'75 puntos) Calcula B^{-1} para $\lambda=1$.

(14) II-B-3) 2006-2007

a) (1 punto) Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) (1'5 puntos) Escribe en forma matricial el siguiente sistema $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array}\right\}$ y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

(15) III-A-3) 2006-2007 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (0'75 puntos) Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.
b) (1'75 puntos) Para $\alpha=1$, calcula A^{-1} y resuelve $AX=B$.

(16) V-A-3) 2006-2007

a) (1'5 punto) Calcula el valor de m para el que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2-A=I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m.

b) (1 punto) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2-M=I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.

(17) VI-A-3) 2006-2007 Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) (1’25 puntos) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A-2I$ es cero.
b) (1’25 puntos) Calcula la matriz inversa de $A-2I$ para $\lambda=-2$.

(18) I-B-3) 2007-2008 (2’5 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

Calcula la matriz *P* que verifica $AP-B=C^t$

(19) III-B-3) 2007-2008 Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\m&m^2&m^2\\m&m&m^2\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Halla los valores del parámetro *m* para los que el rango de *A* es menor que 3.

b) (1’5 puntos) Estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de *m* obtenidos en el apartado anterior.

(20) V-A-3) 2007-2008 (2’5 puntos) Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A-kI)^2$ es la matriz nula.

(21) V-B-3) 2007-2008 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\-1&1&1\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula, si existen, la matriz inversa de *A* y la de *B*.
b) (1’5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX+B=A+I$, donde *I* denota la matriz identidad de orden 3.

(22) VI-B-3) 2007-2008 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3&k\\k&1&3\\1&7&k\end{pmatrix}$

a) (1’25 puntos) Estudia el rango de *A* en función de los valores del parámetro *k*. **b) (1’25 puntos)** Para $k=0$, halla la matriz inversa de *A*.

(23) I-B-3) 2008-2009 Sean *A, B, C* y *X* matrices cualesquiera que verifiquen $AXB=C$.
a) (1 punto) Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de *A* es 3, el de *B* es -1 y el de *C* es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.
b) (1’5 puntos) Si $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&3\\4&2\end{pmatrix}$ calcula la matriz *X*.

(24) II-B-3) 2008-2009 (2’5 puntos) Sean $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\\0&3\end{pmatrix}$.

Determina la matriz *X* que verifica $AX-B^t=2C$.

(25) IV-A-3) 2008-2009 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-4&2\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula, si existe, la matriz inversa de *A*.
b) (1’5 puntos) Calcula las matrices *X* e *Y* que satisfacen las ecuaciones matriciales $XA=A+2B$ y $AY=A+2B$.

(26) V-B-3) 2008-2009 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula, si existe, A^{-1}.

b) (1'5 puntos) Resuelve el sistema $AX = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones.

(27) VI-A-3) 2008-2009 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I es la matriz identidad de orden 2.

a) (075 puntos) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.

b) (0'5 puntos) Calcula B^{-1} para $k = -1$.

c) (1'25 puntos) Determina constantes α y β paa las que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$.

(28) I-B-3) 2009-2010 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) (0'5 puntos) Determina los valores de α para los que A tiene inversa.

b) (1'25 puntos) Calcula la inversa de A para $\alpha = 1$.

c) (0'75 puntos) Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.

(29) II-A-3) 2009-2010 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) (0'5 puntos) Indica los valores de m para los que A es invertible.

b) (2 puntos) Resuelve la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$.

(30) III-A-3) 2009-2010 Considera las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) (0'75 puntos) Calcula A^{-1}.

b) (1'75 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

(31) IV-A-3) 2009-2010 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

b) (1'25 puntos) Calcula A^{-1}. (Sugerencia: Puedes utilizar la igualdad del apartado a)

(32) V-B-3) 2009-2010 (2'5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz X que cumpla la ecuación $AXB = C$.

(33) I-B-3) 2010- 2011 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

b) (1'25 puntos) Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

(34) II-B-3) 2010- 2011 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) (0'5 puntos) Demuestra que se verifica $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1'25 puntos) Justifica que A es invertible y halla su inversa.

c) (0'75 puntos) Calcula razonadamente A^{100}.