

ÁLGEBRA

MATICES Y DETERMINANTES

1.- MATRICES

1.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Matriz de orden $n \times m$: es una serie de $n \times m$ números reales distribuidos en n filas y m columnas. Su notación habitual es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

$n \times m$ se dice que es la dimensión de la matriz

Tipos de matrices:

- **Matrices iguales:** dos matrices se dirán iguales si tienen la misma dimensión y tienen el mismo valor los elementos de cada posición.
- **Matriz Nula:** es aquella matriz en la que todos sus elementos valen 0. Existen muchas matrices nulas, ya que puede variar la dimensión. La denotaremos con la letra O .
- **Matriz Fila:** la que tiene dimensión $1 \times m$.
- **Matriz Columna:** la que tiene dimensión $n \times 1$.
- **Matriz Cuadrada:** cuando el número de filas coincide con el número de columnas, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ es una matriz cuadrada de orden $n \times n$ que se resume diciendo de orden n . Los elementos principales en una matriz cuadrada son:
 - **Diagonal principal:** la línea formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
 - **Diagonal secundaria:** la línea formada por los elementos $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$
- **Matriz Triangular Superior:** es una matriz cuadrada en la que los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos.
- **Matriz Triangular Inferior:** es una matriz cuadrada en la que los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos.
- **Matriz Diagonal:** es una matriz triangular superior e inferior, es decir en la que todos los elementos de fuera de la diagonal principal deben ser nulos.
- **Matriz Escalar:** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales.
- **Matriz Unidad:** es una matriz escalar en la que los elementos de la diagonal principal son todos unos.
- **Matriz Traspuesta (de una matriz dada):** es la matriz que resulta de intercambiar filas por columnas. Si una matriz es de orden $n \times m$, su traspuesta es de orden $m \times n$. Si la matriz dada es A , su traspuesta se denotará A^t .
- **Matriz Opuesta (de una matriz dada):** es la formada por los opuestos de los elementos de dicha matriz.

- **Matriz Simétrica:** es aquella que coincide con su traspuesta. Para que esto pueda ocurrir la matriz tendrá que ser cuadrada.
- **Matriz Antisimétrica:** es aquella matriz cuadrada en la que su opuesta coincide con su traspuesta.
- **Matriz Ortogonal:** se define como una matriz cuadrada que cumple que el producto de ella y su traspuesta es la matriz unidad (es preciso utilizar el producto de matrices).
- **Matriz Inversa** (de una matriz cuadrada dada): se define como aquella matriz tal que al multiplicarla con la matriz dada, en los dos órdenes posibles, nos da como resultado la matriz unidad (es preciso utilizar el producto de matrices).

1.2. OPERACIONES CON MATRICES

A.- Definiciones:

Suma de dos matrices:

Para poder realizar la suma es necesario que los órdenes de ambas matrices coincidan. Si al conjunto de las matrices de orden $n \times m$ lo denotamos M_{nm} la suma es una operación interna $+$: $M_{nm} \times M_{nm} \rightarrow M_{nm}$ que viene dada por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,..,m}}, \text{ siendo } A = (a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,..,m}} \quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,..,m}}$$

Producto de una matriz por un escalar:

El producto de una matriz con un escalar es una operación externa \cdot : $\mathbf{R} \times M_{nm} \rightarrow M_{nm}$ que viene dada por:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,..,m}}$$

Producto de dos matrices:

Para poder multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda. Es una operación \times : $M_{np} \times M_{pm} \rightarrow M_{nm}$ que viene dada por:

$$A \times B = A \cdot B = AB = \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,..,m}}$$

B.- Propiedades:

De la suma: el conjunto $(M_{nm}, +)$ cumple las siguientes propiedades:

- **Asociatividad:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Neutro:** la matriz nula O cumple $A + O = O + A = A \quad \forall A$
- **Opuesto:** dada A existe su opuesta $-A$ que cumple $A + (-A) = (-A) + A = O$
- **Conmutatividad:** $A + B = B + A$

Por cumplir estas propiedades se dice que $(M_{nm}, +)$ tiene estructura de **Grupo Conmutativo**.

Del producto por un escalar: el conjunto $(M_{nm}, +, \cdot, \mathbf{R})$ cumple las siguientes propiedades:

- **Distributividad del producto de un escalar con respecto a la suma de matrices:**

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$
- **Distributividad del producto de una matriz respecto de la suma de escalares:**

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
- **Asociatividad del producto de dos escalares y una matriz:** $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$
- **Existencia de neutro del producto externo:** $\exists 1 \in \mathbf{R} / 1 \cdot A = A \quad \forall A$

Por cumplirse estas propiedades junto con las que ya cumplía la suma, se dice que el conjunto $(M_{nm}, +, \cdot, \mathbf{R})$ tiene estructura de **Espacio Vectorial** sobre \mathbf{R} .

Del producto de matrices: en el conjunto de matrices cuadradas de orden n el producto de matrices cumple las siguientes propiedades:

- **Asociatividad:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- **Neutro:** $\exists I \in M_{n \times n}$ matriz unidad tal que $A \cdot I = I \cdot A = A \quad \forall A$
- **Distributividad del producto respecto de la suma:** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Por cumplirse estas propiedades junto con las de la suma se dice que el conjunto de las matrices cuadradas $(M_n, +, \cdot)$ tiene estructura de **Anillo Unitario**.

Es importante tener en cuenta que **el producto de matrices**, en general, **no es conmutativo**.

1.3. RANGO DE UNA MATRIZ

Combinación lineal en una matriz: una fila o columna en una matriz es combinación lineal de otras si puede ser obtenida multiplicándolas por ciertos números y sumándolas entre sí.

Independencia lineal de las filas o columnas de una matriz: un conjunto de filas o columnas es linealmente independiente si ninguna de ellas se puede obtener como combinación lineal de las demás.

Para estudiar cuántas filas o columnas hay linealmente independientes conviene utilizar los determinantes que se estudiarán más adelante.

Rango de una matriz: es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes que hay en una matriz.

Matrices equivalentes: dos matrices se dirán equivalentes si tienen el mismo rango.

2.- DETERMINANTES

Se calculan tan sólo para matrices cuadradas.

2.1.- DEFINICIONES BÁSICAS

Determinante de una matriz de orden 2: Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se define su determinante como

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Es decir, el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Determinante de una matriz de orden 3: Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se define su determinante

como el número dado por

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Es decir, la suma del producto de los elementos de la diagonal principal y los productos de sus paralelas multiplicadas con las esquinas contrarias a ellas, menos la suma del producto de los elementos de la diagonal secundaria y los productos de sus paralelas con las esquinas correspondientes. A esta regla se le llama **Regla de Sarrus**

Determinante de una matriz de orden superior a 3: Se puede definir de forma análoga como las sumas de unos ciertos productos de elementos escogidos uno de cada fila y acompañados de un cierto signo de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^\alpha a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}, \text{ donde } (j_1, j_2, j_3, \dots, j_n) \text{ son las}$$

distintas permutaciones de los índices $(1,2,3,\dots,n)$ y donde α es la paridad de la permutación, es decir el número de cambios que habría que aplicar a parejas de elementos consecutivos de $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ para llegar a obtener $(1,2,3,\dots,n)$.

Esta definición es poco operativa y no se suele utilizar. Para realizar determinantes de orden superior a 3 se usa la siguiente propiedad:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots + a_{in}A_{in}$$

pudiéndose tomar cualquier valor para i , y siendo A_{ij} el **Adjunto del elemento** a_{ij} , dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

donde M_{ij} es el **Menor complementario** del elemento a_{ij} (determinante de la matriz que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j).

De forma análoga se puede desarrollar el determinante usando una columna en vez de una fila.

2.2.- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Se darán las propiedades para filas, pero exactamente igual servirían si en su lugar se nombran a las columnas.

- 1.- Si se traspone una matriz su determinante no varia.
- 2.- Si se intercambian entre si dos filas el determinante cambia de signo.
- 3.- Si en el determinante hay dos filas proporcionales, vale 0.
- 4.- Si una de las filas de la matriz está formada por ceros, el determinante vale 0.
- 5.- Si una fila es combinación lineal de las demás el determinante vale 0.
- 6.- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- 7.- Si se multiplican (o dividen) todos los términos de una fila por un número el determinante queda multiplicado (o dividido) por dicho número.
- 8.- Si cada elemento de una fila está formado por dos sumandos, el determinante se puede expresar como suma de dos determinantes, uno de ellos llevará en la fila correspondiente a los primeros sumandos y el otro llevará a los segundos, siendo el resto de las filas iguales a las del determinante dado.
- 9.- Si a una fila se le suma una combinación lineal de las demás el determinante no varia (es importante tener en cuenta que en dicha combinación lineal no puede aparecer ella).
- 10.- Cuando un determinante tiene valor no nulo sus filas son linealmente independientes.

2.3 CÁLCULO DE DETERMINANTES

Para calcular determinantes de orden superior a 3 con elementos numéricos o bien algebraicos se suele utilizar uno de los siguientes procesos:

A) Desarrollar por una línea

Usar las propiedades anteriores para conseguir una línea con ceros en todos los elementos salvo en uno, y posteriormente desarrollar el determinante por ella, repitiéndose el proceso hasta llegar a uno de orden 3 en el que se podrá utilizar la regla de Sarrus o bien continuar hasta el orden 2.

B) Triangular el determinante

Aplicar las propiedades hasta que la matriz inicial se convierta en triangular superior o inferior, siendo el resultado del determinante el producto de los elementos de la diagonal.

3.- APLICACIÓN DE LOS DETERMINANTES A LAS MATRICES

3.1 CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Dada una matriz A , para que exista su inversa A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ es condición necesaria y suficiente que $|A| \neq 0$, calculándose entonces con la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj}(A))^t$$

Siendo $\text{adj}(A) = (A_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ es decir, la matriz formada por los adjuntos de los elementos de la matriz A .

3.2 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MATRICIALES

Para resolver una ecuación en la que la incógnita a calcular sea una matriz, se despejará de forma análoga a las ecuaciones algebraicas, con la única diferencia de no poder mandar dividiendo ningún factor de un miembro al otro. En lugar de ello habrá que comprobar si la matriz que multiplica y queremos quitar es invertible (tiene inversa) y en caso afirmativo se multiplicará por dicha inversa en ambos miembros de la ecuación. Se debe multiplicar en los dos miembros por el mismo lado, es decir en ambos por la izquierda o en ambos por la derecha.

3.3 CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ CUALQUIERA

Para calcular el rango de una matriz de orden $n \times m$ se busca el determinante de mayor orden posible que se puede formar extrayendo filas o columnas de ella y cuyo valor sea no nulo. El orden de este determinante será el rango de la matriz.

El rango de una matriz no varía cuando se realizan en ella el tipo de transformaciones que hacen que los determinantes no varíen con respecto a ser o no nulos. Esto se utiliza para obtener una equivalente con ceros en muchos de sus elementos.

ESTUDIO:

Por el llamado **Teorema de Rouché-Frobénius**

Si es A la matriz del sistema y llamamos A' a la matriz que resulta de ampliar A con una nueva columna formada por los elementos de B , se va a cumplir:

- Si $\text{rang}(A) < \text{rang}(A')$ el sistema es incompatible
- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = n^\circ$ incógnitas el sistema es compatible determinado
- Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') < n^\circ$ incógnitas el sistema es compatible indeterminado

RESOLUCIÓN:

Si el sistema es compatible determinado coincidirá el número de ecuaciones y de incógnitas, con lo que la matriz del sistema será cuadrada y con determinante no nulo y se puede resolver:

a) Multiplicando con la inversa de A

Si $A \cdot X = B$ se tendrá $X = A^{-1} \cdot B$ (debemos tener cuidado con multiplicar la inversa por el mismo lado en que estaba A , en este caso, por la izquierda).

b) Usando la Regla de Cramer

Si llamamos A_{x_i} a la matriz que resulta de cambiar en A la columna que correspondían a los

coeficientes de x_i por los elementos de B , se tiene para todos los x_i : $x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}$.

Si el sistema es compatible indeterminado la mejor forma de resolverlo es tomar una letra como parámetro y resolverlo por uno de los métodos tradicionales.